

# Méthodes Numériques

## Master-IMAG2E

### Description

Lorsque l'on considère un modèle d'un problème physique quelque soit le domaine considéré (astrophysique, géophysique, etc ...), on aboutit presque toujours sur les équations classiques de la physique mathématique comme les équations d'onde, de diffusion ou d'advection (ex. mécanique des fluides, équations de la chaleur, ...) mais également sur des systèmes d'équation différentielles ordinaires (EDO) pour les systèmes dynamiques (ex. problème à N-corps, dynamique moléculaire, ...). La complexité des processus physiques étudiés rend bien souvent impossible d'aborder le problème d'une manière purement théorique et les solutions sont obtenues numériquement à l'aide de calculateurs puissants.

Le but de ce cours est de donner aux étudiants une base solide en calcul numérique centrée sur l'intégration d'équations différentielles ordinaires (EDO) et plus particulièrement aux dérivées partielles (EDP). Les notions essentielles leur permettant d'établir les schémas numériques d'intégration, d'en étudier leurs stabilités et enfin d'"implémenter" sous forme d'un programme informatique les méthodes employées seront présentées en détails.

On peut penser que l'intégration numérique d'équations différentielles consiste "simplement" à remplacer des opérateurs de dérivations continus par des approximations à l'aide de différences finies. Malheureusement, le passage du continu au discret est nettement compliqué par le phénomène d'instabilités d'un schéma numérique. Bien souvent, le schéma le plus intuitif conduira dans les solutions numériques à des oscillations et divergences exponentielles de l'erreur numérique commise, causées par l'amplification des erreurs.

Dans le cadre de ce cours les étudiants apprendront à construire un schéma numérique et à en établir le domaine de stabilité. À cette occasion, nous passerons en revue les schémas classiques d'intégrations de chaque type d'équations différentielles (PDEs elliptiques, hyperboliques et paraboliques).

Cette approche théorique essentielle, sera complétée par une approche pratique où les méthodes étudiées seront implémentées sous forme de programme informatique dans le cadre de travaux pratiques. Les étudiants pourront développer ces programmes dans le langage de leur choix<sup>1</sup> et les considérations pratiques du cours seront autant que possible agnostique du point de vue du langage de programmation. Il s'agira tout d'abord d'appliquer directement les considérations du cours sur des équations différentielles classiques. Par la suite,

---

1. Le C, le fortran ou la couche C du C++ est néanmoins conseillée.

fort de cette expérience, des projets numériques centrés sur des problèmes physiques concrets seront à réaliser par les étudiants.

## Plan

### Approximations par différences finies

- Retour sur l'interpolation de Lagrange,
- approximation discrète d'un opérateur continu,
- erreurs numériques commises (troncature, arrondi).

### Équations différentielles ordinaires

- Rappels sur les EDOs,
- précision, erreur de troncature, convergence,
- introduction à l'intégration numérique autour des méthodes à 1 pas (Euler, Runge-Kutta, série de Taylor, Crank-Nicolson, ...),
- méthode à pas multiples,
- stabilité (zéro, absolue).

### Équations différentielles aux dérivées partielles

- Rappels sur les EDPs,
- méthodes des différences finies,
- étude de stabilité des schémas numériques (analyse de Von Neumann),
- précision, erreur de troncature, convergence,
- introduction aux volumes finis pour les équations de conservation.

### Travaux pratiques

Il s'agit de mettre en oeuvre les techniques apprises pour résoudre numériquement les équations suivantes :

- équation de diffusion,
- équation d'onde,
- et d'advection,

en développant des programmes informatiques à cet effet.

Les schémas numériques classiques (Forward Time Centered Space (FTCS), Backward Time Centered Space (BTCS), Crank-Nicolson, Lax, Lax-Wendroff, etc ...) seront implémentés et étudiés (précision, stabilité, comparaison des schémas implicites/explicites, effet de la diffusion numérique, ...).

### Projets

Projets de physiques numériques au choix : développement d'un code hydrodynamique, problème à n-corps, vent stellaire, érosion/sédimentation d'un relief, etc ...

## Notions de bases

Les notions de bases du calcul et de l'analyse numériques telles que :

- Représentation des nombres en machine,
- interpolation,
- intégration numérique de fonction par quadrature,
- résolution de système linéaires (méthodes directes, itératives),
- etc ...

seront introduites et présentées au moment de leur utilisation.